

CHAPITRE

2

II MODELISATION DU SIMULATEUR**II.1 INTRODUCTION**

Pour effectuer l'analyse et la synthèse dynamique, il est nécessaire de connaître les relations entre les grandeurs d'entrées et de sorties. L'ensemble de ces relations constitue le modèle mathématique du système. L'efficacité de ce modèle repose sur une analogie entre le comportement des objets physiques et celui des formules mathématiques.

Dans l'automatique, modéliser un système consiste à établir un ensemble de relations mathématiques qui permettent de décrire avec précision suffisante les interactions entre le système et son environnement. Lorsque les relations citées auparavant sont issues des équations de la physique, le modèle obtenu est dit modèle de connaissance, ces relations découlent des observations disponibles sur le système. On aboutit aussi au modèle de représentation, en passant par l'identification.

Dans le présent chapitre, nous abordons en premier la modélisation dynamique du système déjà présenté dans le chapitre I. Ensuite, nous validerons le modèle développé, et en fin nous présenterons des simulations en boucle ouverte du modèle.

II.2 MODELE NON LINEAIRE [MAN2]

Le modèle physique est développé sous certaines hypothèses simplificatrices. En premier lieu, on suppose que les dynamiques du sous-système rotor sont des équations différentielles du premier ordre. De plus, on suppose que les frottements sont de type visqueux, et que le sous-système hélice-air peut être décrit par les lois d'écoulement aérodynamiques.

II.2.1 SOUS SYSTEME D'ELEVATION

D'abord, considérons la rotation de la poutre dans le plan vertical. C'est-à-dire autour de l'axe horizontal. En appliquant la seconde loi de Newton on obtient :

$$M_V = J_V \frac{d^2 \alpha_V}{dt^2} \quad (II.1)$$

Avec :

$$M_V = \sum_{i=1}^4 M_{Vi} \quad (II.2)$$

$$J_V = \sum_{i=1}^8 J_{Vi} \quad (II.3)$$

L'équation (II.1) peut être écrite sous la forme :

$$J_V \ddot{\alpha}_V = M_{V1} + M_{V2} + M_{V3} + M_{V4} \quad (II.4)$$

Où :

M_V : La somme des moments dans le plan vertical

J_V : La somme des moments d'inertie par rapport à l'axe horizontal

α_V : L'angle d'élévation de la tige

M_{V1} : Moment de la gravitation

M_{V2} : Moment de la force aérodynamique

M_{V3} : Moment de la force centrifuge

M_{V4} : Moment de friction

Les différents moments sont calculés comme suit :

II.2.1.1 MOMENT GRAVITATIONNEL M_{V1}

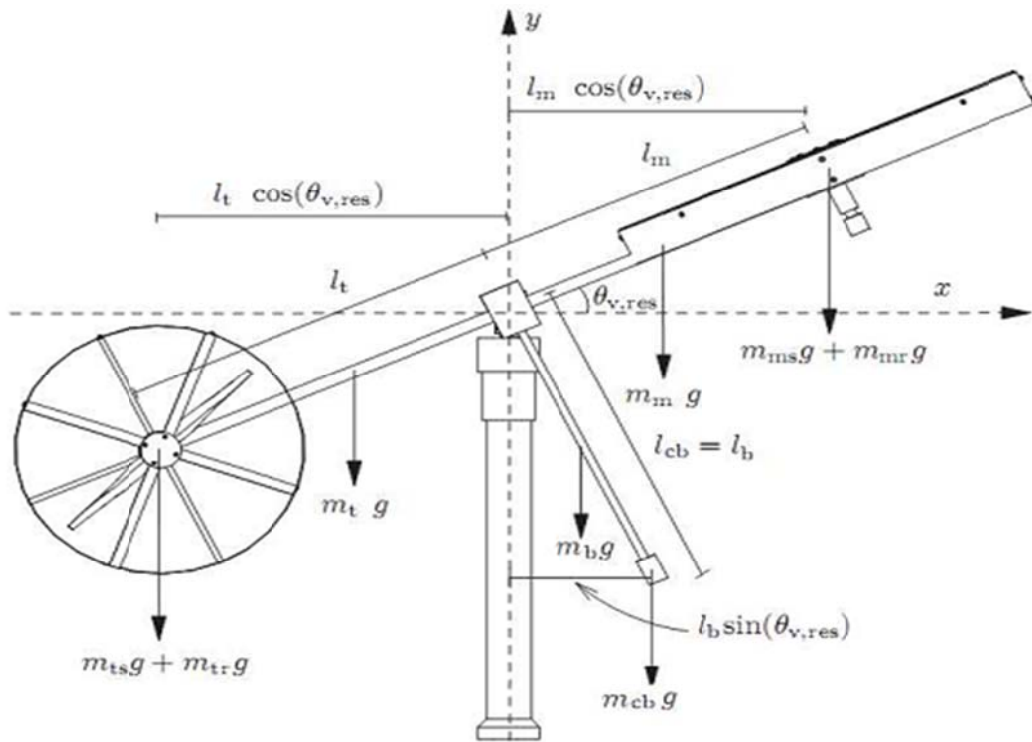


Figure II.1 : forces de gravités agissantes sur le TRMS

$$M_{V1} = g \left\{ \left[\left(\frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t - \left(\frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m \right] \cos \alpha_V - \left(\frac{m_b}{2} l_b + m_{cb} l_{cb} \right) \sin \alpha_V \right\} \quad (II.5)$$

Qui peut être écrite :

$$M_{V1} = g \left\{ [A - B] \cos \alpha_V - C \sin \alpha_V \right\} \quad (\text{II.6})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} A = \left(\frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t \\ B = \left(\frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m \\ C = \left(\frac{m_b}{2} l_b + m_{cb} l_{cb} \right) \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Où :

M_{V1} : Le moment correspondant aux forces de gravités

m_{mr} : La masse du rotor principal

m_m : La masse de la partie principale de la tige

m_{tr} : La masse du rotor secondaire

m_t : La masse de la partie secondaire de la tige

m_{cb} : La masse du contrepoids

m_b : La masse de la tige du contrepoids

m_{ms} : La masse de l'hélice principale

m_{ts} : La masse de l'hélice secondaire

l_m : La longueur de la partie principale de la tige

l_t : La longueur de la partie secondaire de la tige

l_b : La longueur de la tige du contrepoids

- l_{cb} : La distance entre le contrepoids et l'articulation
- g : L'accélération gravitationnelle

II.2.1.2 MOMENT DE LA FORCE AERODYNAMIQUE M_{V2}

Pour déterminer les moments des forces propulsives appliquées à la tige on considère la situation suivante illustrée dans la figure [II.2]

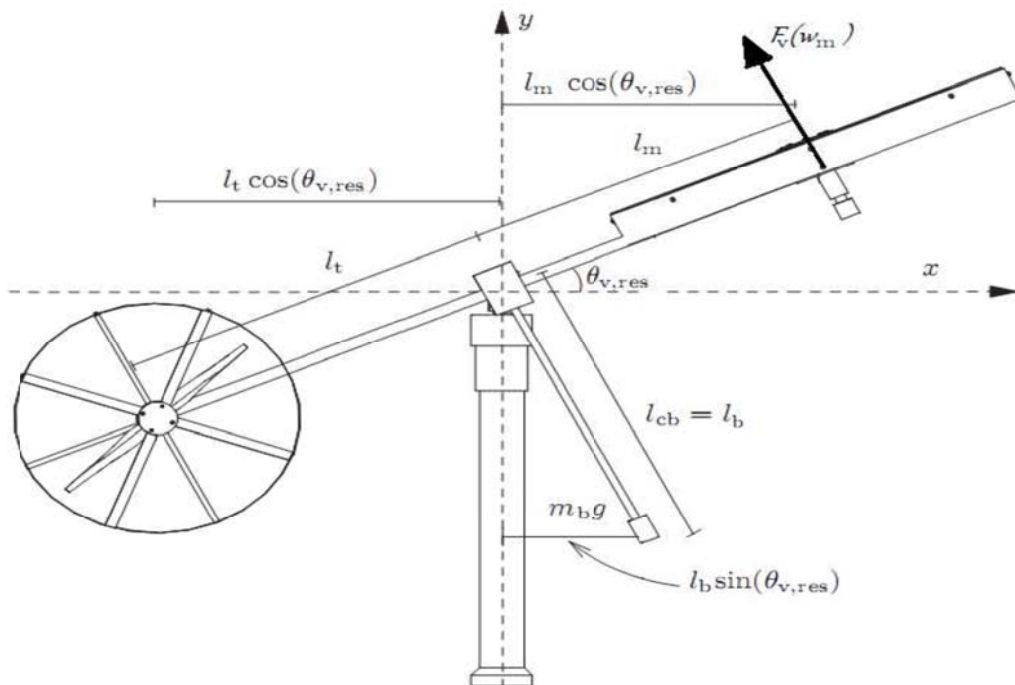


Figure II.2 : Moments de la force aérodynamique et de friction.

$$M_{V2} = l_m F_v(\omega_m) \quad (II.8)$$

Où :

- M_{V2} : Le moment de la force aérodynamique développé par le rotor principal.
- ω_m : La vitesse angulaire du rotor principal.

$F_V(\omega_m)$: Exprime la dépendance de la force aérodynamique de la vitesse angulaire du moteur. Elle doit être mesurée expérimentalement.

II.2.1.3 MOMENT DES FORCES CENTRIFUGE M_{V3}

L'équilibre statique du vilebrequin est obtenu lorsque la résultante des forces centrifuges est nulle, plus précisément lorsque le centre de gravité se trouve sur l'axe de rotation.

Néanmoins, l'équilibre statique n'implique pas nécessairement l'équilibre dynamique. En effet, le vilebrequin peut donner lieu à un moment de flexion dû aux forces centrifuges d'autant plus grandes que le mouvement de rotation est important

$$M_{V3} = \sum_{i=1}^6 M_{V3,i} \quad (\text{II.9})$$

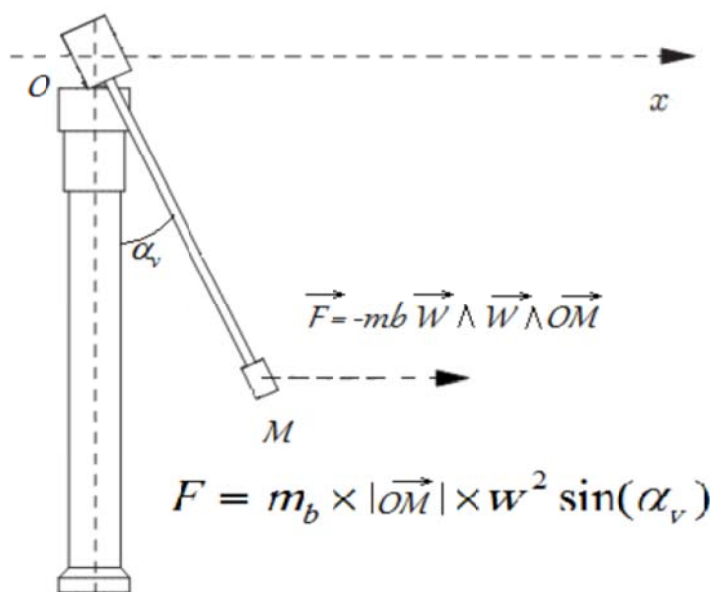


Figure II.3 : Moments de la force centrifuge.

$$M_{V3,1} = -(m_{tr} + m_{ts}) \overrightarrow{\Omega_h} \wedge (\overrightarrow{\Omega_h} \wedge \overrightarrow{l_t})$$

$$\overrightarrow{\Omega_h} = \Omega_h \vec{k} \quad (\text{II.10})$$

$$\overrightarrow{l_t} = -l_t \cos(\alpha_V) \vec{j} - l_t \sin(\alpha_V) \vec{k}$$

Avec :
$$\Omega_h = \frac{d\alpha_h}{dt} \quad (\text{II.11})$$

Ω_h : Vitesse angulaire de la tige autour de l'axe vertical et α_h est l'angle d'azimut

de la tige.

$$M_{V3,1} = -\Omega_h^2 (m_{tr} + m_{ts}) l_t^2 \sin \alpha_V \cos \alpha_V \quad (\text{II.12})$$

$$M_{V3,2} = -\Omega_h^2 \frac{m_t}{4} l_t^2 \sin \alpha_V \cos \alpha_V \quad (\text{II.13})$$

$$M_{V3,3} = -\Omega_h^2 (m_{mr} + m_{ms}) l_m^2 \sin \alpha_V \cos \alpha_V \quad (\text{II.14})$$

$$M_{V3,4} = -\Omega_h^2 \frac{m}{4} l_m^2 \sin \alpha_V \cos \alpha_V \quad (\text{II.15})$$

$$M_{V3,5} = \Omega_h^2 \frac{m_b}{4} l_b^2 \sin \alpha_V \cos \alpha_V \quad (\text{II.16})$$

$$M_{V3,6} = \Omega_h^2 m_{cb} l_{cb}^2 \sin \alpha_V \cos \alpha_V \quad (\text{II.17})$$

$$M_{V3} = -\Omega_h^2 \left\{ \left[\left(\frac{m_t}{4} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t^2 + \left(\frac{m}{4} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m^2 - \left(\frac{m_b}{4} l_b^2 + m_{cb} l_{cb}^2 \right) \right] \right\} \sin \alpha_V \cos \alpha_V$$

$$H = \left(\frac{m_t}{4} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t^2 + \left(\frac{m}{4} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m^2 - \left(\frac{m_b}{4} l_b^2 + m_{cb} l_{cb}^2 \right) \quad (\text{II.18})$$

$$M_{V3} = -\Omega_h^2 H \sin \alpha_V \cos \alpha_V \quad (\text{II.19})$$

II.2.1.4 MOMENT DE FRICTION M_{V4}

$$M_{V4} = -\Omega_V K_V \quad (\text{II.20})$$

Avec :

$$\Omega_V = \frac{d\alpha_V}{dt} \quad (\text{II.21})$$

Ω_V : La vitesse angulaire autour de l'axe horizontal

K_V : Constante de friction.

II.2.1.5 MOMENT D'INERTIE J_V

D'après la figure [II.1] on peut déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal. On remarque que ce moment est indépendant de l'angle d'élévation

Dans le graphique ci-dessous [Figure II.4]. Montre comment calculer la détermination de l'inertie des jambes et vicieux.

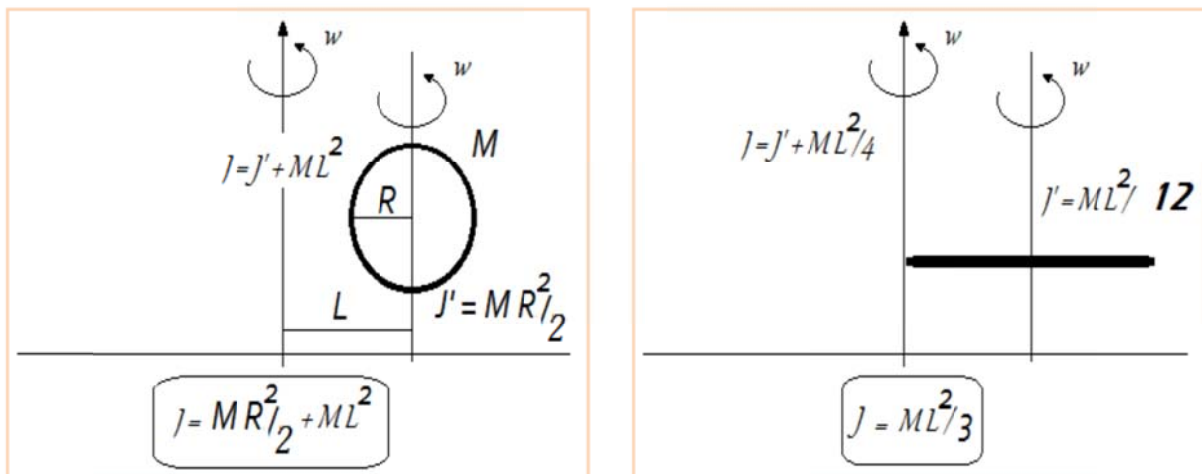


Figure II.4 : Le schéma montre le droit des couples d'inertie

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{V1} = m_{mr} l_m^2 \\ J_{V2} = m_m \frac{l_m^2}{3} \\ J_{V3} = m_{cb} l_{cb}^2 \\ J_{V4} = m_b \frac{l_b^2}{3} \\ J_{V5} = m_{tr} l_t^2 \\ J_{V6} = m_t \frac{l_t^2}{3} \\ J_{V6} = \frac{m_{ms}}{2} r_{ms}^2 + m_{ms} l_m^2 \\ J_{V6} = m_{ts} r_{ts}^2 + m_{ts} l_t^2 \end{array} \right. \quad (II.22)$$

Ou :

r_{ms} : Le rayon de l'hélice principale

r_{ts} : Le rayon de l'hélice secondaire

II.2.2 SOUS SYSTEME D'AZIMUT

De la même façon, on peut décrire le mouvement de la tige autour de l'axe vertical, le mouvement horizontal peut être décrit comme étant un mouvement de rotation d'un solide :

$$M_h = J_h \frac{d^2 \alpha_h}{dt^2} \quad (II.23)$$

Où : M_h est la somme des moments des forces agissantes dans le plan horizontal, et J_h est la somme des moments d'inertie par rapport à l'axe vertical

Ainsi :

$$M_h = \sum_{i=1}^2 M_{hi} \quad (II.24)$$

$$J_h = \sum_{i=1}^8 J_{hi} \quad (II.25)$$

II.2.2.1 MOMENT DE LA FORCE AERODYNAMIQUE

Pour déterminer les moments de forces appliquées à la tige, on considère le cas présenté dans la figure [II.5]

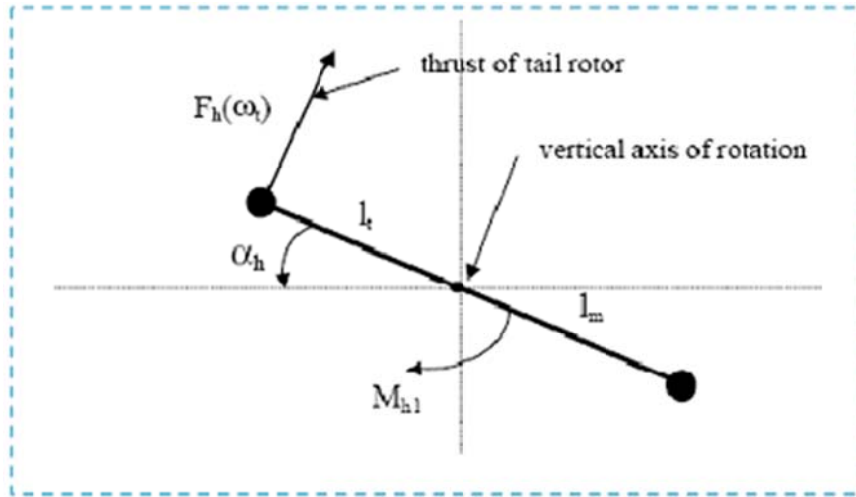


Figure II.5 : moments des forces dans le plan horizontal

$$M_{h1} = l_t F_h(\omega_t) \cos \alpha_V \quad (\text{II.26})$$

Où :

ω_t La vitesse angulaire du rotor secondaire

$F_h(\omega_t)$ Exprime la dépendance de la force aérodynamique de la vitesse angulaire

du rotor secondaire

II.2.2.2 MOMENT DE FRICTION

$$M_{h2} = -\Omega_h K_h \quad (\text{II.27})$$

Avec : K_h Constante de friction

II.2.2.3 MOMENT D'INERTIE

Les moments d'inertie relative à l'axe vertical sont

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{h1} = \frac{m_m}{3} (l_m \cos \alpha_V)^2 \\ J_{h2} = \frac{m_t}{3} (l_t \cos \alpha_V)^2 \\ J_{h3} = \frac{m_b}{3} (l_b \sin \alpha_V)^2 \\ J_{h4} = m_{mr} (l_m \cos \alpha_V)^2 \\ J_{h5} = m_{mr} (l_m \cos \alpha_V)^2 \\ J_{h6} = m_{cb} (l_{cb} \sin \alpha_V)^2 \\ J_{h7} = \frac{m_{ts}}{2} r_{ts}^2 + m_{ts} (l_{lt} \cos \alpha_V)^2 \\ J_{h8} = m_{ms} r_{ms}^2 + m_{ms} (l_m \cos \alpha_V)^2 \end{array} \right. \quad (II.28)$$

Ou sous forme compacte :

$$J_h(\alpha_V) = D \cos^2 \alpha_V + E \sin^2 \alpha_V + F \quad (II.29)$$

Où : D, E et F sont des paramètres constantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{m_b}{3} l_b^2 + m_{cb} l_{cb}^2 \\ E = \left(\frac{m_m}{3} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m^2 + \left(\frac{m_t}{3} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t^2 \\ F = m_{ms} r_{ms}^2 + \frac{m_{ts}}{2} r_{ts}^2 \end{array} \right. \quad (II.30)$$

Où :

J_{tr} Le moment d'inertie dans le moteur secondaire.

J_{mr} Le moment d'inertie dans le moteur principale.

S_V Le moment angulaire dans le plan vertical.

S_h Le moment angulaire dans le plan horizontal.

II.2.3 DYNAMIQUES DES PROPULSEURS (HELICES +MOTEURS DC) [BALD02]

Les deux moteurs sont à courant continu commandés en tension. On considère le modèle simple d'une MCC avec une charge extérieure :

$$I\dot{\omega} = \frac{K_i}{R} (u - K_b \omega) - T_L \quad (\text{II.31})$$

Avec :

ω : Vitesse angulaire du moteur(rad / s).

u : Tension de commande (V).

I : Moment d'inertie.

R : Résistance de l'armature.

K_b : Constante de la FEM.

T_L : Couple résistant généré par la charge.

La charge T_L , ici représente les frottements mécaniques et les frottements aérodynamiques générés par la rotation de l'hélice. Puisque ces frottements sont difficiles à modéliser, on a introduit une nouvelle variable U_w pour le vertical et U_{hh} pour l'horizontal ainsi que deux fonctions non linéaires statiques. Ensuite, il suffit de déterminer leurs caractéristiques statiques expérimentalement

Le sous-système devient alors un système de premier ordre avec une fonction non linéaire à sa sortie :

$$\begin{cases} \frac{du_{VV}}{dt} = \frac{1}{T_{mr}} (-u_{VV} + K_{mr} u_V) \\ \omega_m = P_V(u_{VV}) \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Avec : $P_V(u_{VV}) = \arctan(3u_{VV})$

$$\begin{cases} \frac{du_{hh}}{dt} = \frac{1}{T_{tr}} (-u_{hh} + K_{tr} u_v) \\ \omega_t = P_h(u_{hh}) \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

Avec : $P_h(u_{hh}) = \arctan(3u_{hh})$

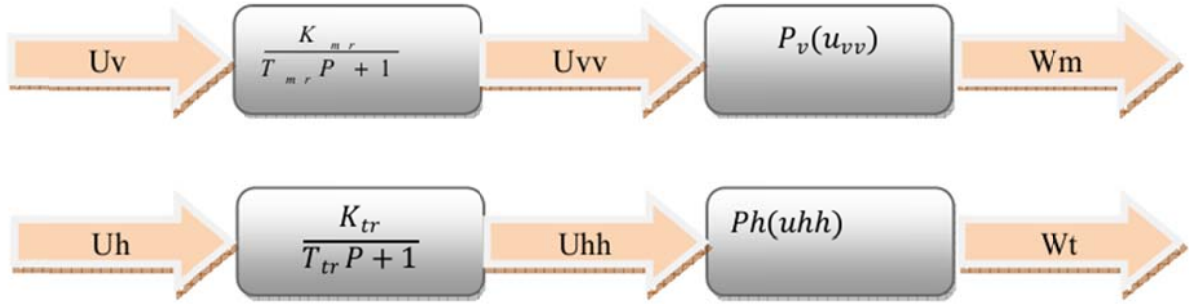


Figure II.6 : Schéma bloc des moteurs

Où

T_{tr} : La constante du temps du moteur secondaire.

T_{mr} : La constante du temps du moteur principal.

K_{mr} : Le gain statique du moteur principal.

K_{tr} : Le gain statique du moteur secondaire .

II.3 MODELE D'ETAT

En utilisant les équations précédentes, on peut écrire les équations décrivant le mouvement du système comme suit :

$$\frac{dS_V}{dt} = \frac{l_m F_V (\omega_m) - \Omega_V K_V + g \left((A - B) \cos \alpha_V - C \sin \alpha_V \right) - \frac{1}{2} \Omega_h^2 H \sin 2\alpha_V}{J_V} \quad (\text{II.34})$$

$$\frac{d\alpha_V}{dt} = \Omega_V \quad (\text{II.35})$$

$$\Omega_V = S_V + \frac{J_{tr} \omega_t}{J_V} \quad (\text{II.36})$$

$$\frac{dS_h}{dt} = \frac{l_t F_h(\omega_t) \cos \alpha_V - \Omega_h K_h}{J_h(\alpha_V)} \quad (\text{II.37})$$

$$\frac{d\alpha_h}{dt} = \Omega_h \quad (\text{II.38})$$

$$\Omega_h = S_h + \frac{J_{mr} \omega_m \cos \alpha_V}{J_h(\alpha_V)} \quad (\text{II.39})$$

En choisissant comme :

- Entrée : $U = [U_V U_h]^T$
- Vecteur d'état : $X = [\alpha_V \Omega_h u_{VV} \alpha_h \Omega_h u_h]^T$
- Sortie : $Y = [\alpha_h \alpha_V]^T$

On obtient le modèle d'état ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dot{S}_v + \frac{K_w J_{tr}}{J_v T_{tr}} \frac{dP_h(x_6)}{dx_6} (-x_6 + K_{tr} u_h) \\ \dot{S}_v = \frac{l_m}{J_v} F_v(P_v(x_3)) - \frac{K_v}{J_v} x_2 + \frac{g}{J_v} ((A-B) \cos(x_1) - C \sin(x_1)) - \frac{H}{2J_v} x_2^2 \sin(2x_1) \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{T_{mr}} (-x_3 + K_{mr} u_v) \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = \dot{S}_h + K_w J_{mr} \left(\frac{\left[\frac{dP_v(x_3)}{dx_3} \cos(x_1) \dot{x}_3 - P_v(x_3) \sin(x_1) x_2 \right] J_h(x_1) - \frac{dJ_h(x_1)}{dx_1} P_v(x_3) \cos(x_1) x_2}{(J_h(x_1))^2} \right) \\ \dot{S}_h = l_t \frac{F_h(P_h(x_6)) \cos(x_1)}{J_h(x_1)} - K_h \frac{x_5}{J_h(x_1)} \\ \dot{x}_6 = \frac{1}{T_{tr}} (-x_6 + K_{tr} u_h) \end{array} \right. \quad (\text{II.41})$$

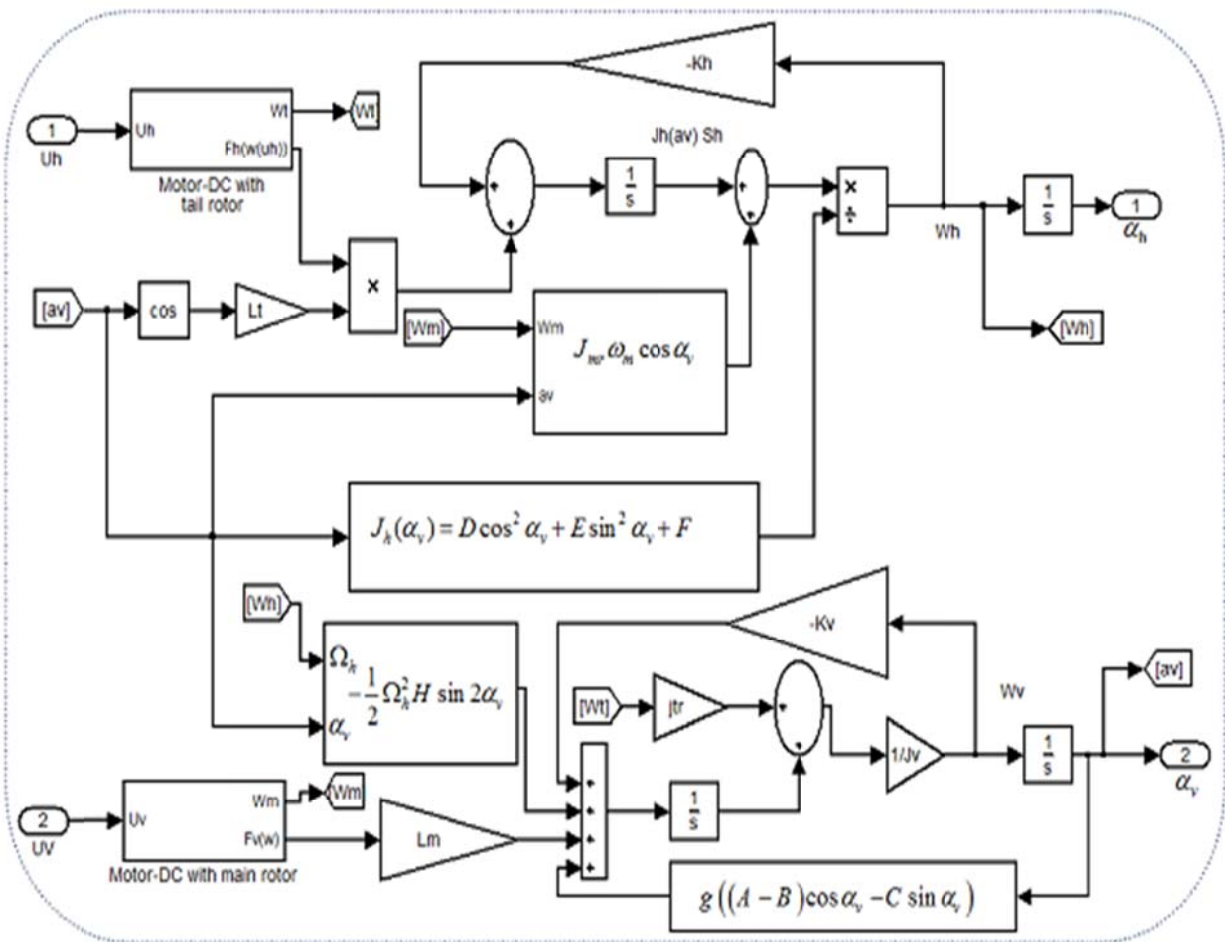


Figure II.7 : Schéma bloc du TRMS

II.4 LE MODELE DECOUPLE

En contraignant le mouvement de la tige dans un seul plan soit l'horizontal ou le vertical, on obtient deux sous modèles chacun ayant un degré de liberté.

II.4.1 MODELE 1 DDL VERTICAL

Ce modèle est dérivé du modèle couplé, en fixant l'angle d'azimut α_h , en posant

$$u_h = 0.$$

On choisit le vecteur d'état suivant :

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_v & \Omega_v & u_{vv} \end{bmatrix}^T \quad (\text{II.42})$$

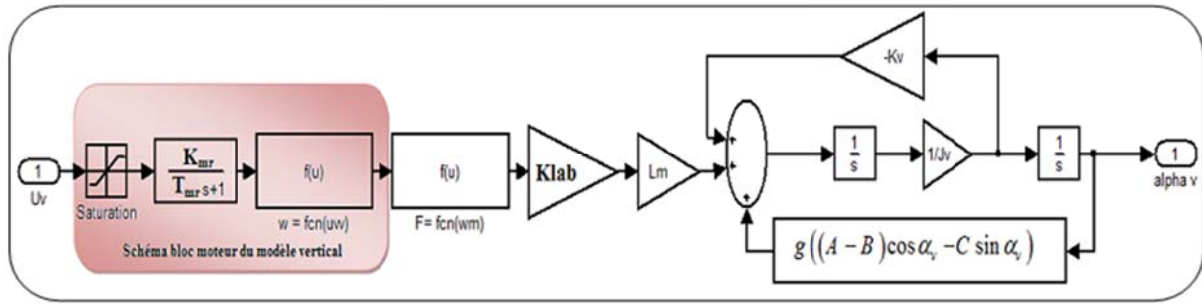


Figure II.8 : Schéma bloc du modèle vertical

La représentation d'état est alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dot{S}_v = \frac{l_m}{J_v} F_v(P_v(x_3)) - \frac{K_v}{J_v} x_2 + \frac{g}{J_v} ((A-B)\cos(x_1) - C \sin(x_1)) \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{T_{mr}} (-x_3 + K_{mr} u_v) \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

Remarque :

Le modèle vertical obtenu ne dépend pas de l'angle d'azimut α_h .

II.4.2 MODELE 1DDL HORIZONTAL

De la même façon que pour le modèle vertical, dans le modèle couplé on pose

$\alpha_v = \alpha_{v0}$ et $u_v = 0$. Et on choisit $X = [\alpha_h \Omega_h u_{hh}]^T$ comme vecteur d'état.

Le modèle horizontal est ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = \dot{S}_h = l_t \frac{F_h(P_h(x_6)) \cos(x_{01})}{J_h(x_1)} - K_h \frac{x_5}{J_h(x_1)} \\ \dot{x}_6 = \frac{1}{T_{tr}} (-x_6 + K_{tr} u_h) \end{cases} \quad (II.44)$$

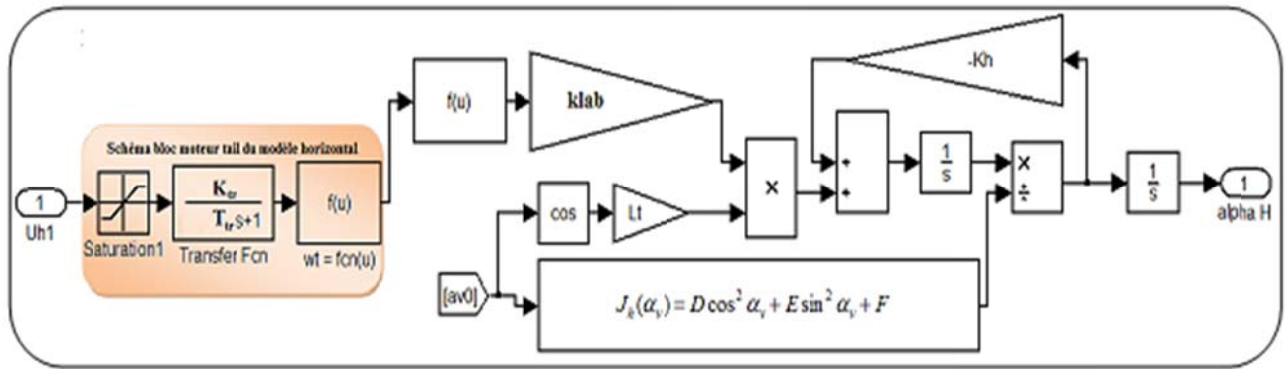


Figure II.9 : Schéma bloc du modèle horizontal

II.5 PARAMETRES DU MODELE

Pour simuler les modèles précédents, on doit d'abord déterminer les paramètres du modèle, qu'on peut les deviser en trois catégories :

- Paramètres physiques.
- Caractéristiques non linéaires.
- Les constantes de temps et les gains statiques. M_{V1}

On a choisi comme caractéristiques non linéaires des moteurs, les fonctions suivantes:[man04]

$$\left\{ \begin{array}{l} P_V(u_{VV}) = 90.99 \times (u_{VV}^6) + 599.73 \times (u_{VV}^5) - 129.26 \times (u_{VV}^4) - \\ \quad 1238.64 \times (u_{VV}^3) + 63.45 \times (u_{VV}^2) + 1283.41 \times u_{VV} \\ P_V(u_{VV}) \cong 600 \times a \tan(2 \times u_{VV}) \\ P_h(u_{hh}) = 2020 \times (u_{hh}^5) - 194.69 \times (u_{hh}^4) - 4283.15 \times (u_{hh}^3) + \\ \quad 262.27 \times (u_{hh}^2) + 3796.83 \times u_{hh} \\ P_h(u_{hh}) \cong 1200 \times a \tan(3.8 \times u_{hh}) \end{array} \right. \quad (\text{II.45})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \text{Unit } P_i(u_{ii}) &= \text{rotation par minute 'rpu'} \\ &= 2\pi/60 \text{ red par Seconde 'red/s'} \end{aligned}$$

Et comme fonctions aérodynamiques les fonctions suivantes : [man04]

$$\left\{ \begin{array}{l} F_V(\omega_m) = -3.48 \times (10^{-12}) \times (\omega_m^5) + 1.09 \times (10^{-9}) \times (\omega_m^4) + 4.123 \times (10^{-6}) \times (\omega_m^3) - \\ \quad 1.632 \times (10^{-4}) \times (\omega_m^2) + 9.544 \times (10^{-2}) \times \omega_m \\ F_h(\omega_t) = -3 \times (10^{-14}) \times (\omega_t^5) - 1.595 \times (10^{-11}) \times (\omega_t^4) + 2.511 \times (10^{-7}) \times (\omega_t^3) - \\ \quad 1.808 \times (10^{-4}) \times (\omega_t^2) + 0.8080 \times \omega_t \end{array} \right. \quad (\text{II. 46})$$

Paramètre	Valeur
A	0,0946875
B	0,11046
C	0,01986
D	0,049881617
E	0,004745733
F	0,006230625
H	0,045109488
Lm	0,24
Lt	0,25
Lb	0,26
Lcb	0,25
Mm	0,0145
Mt	0,0155

Mmr	0,228
Mms	0,225
Mtr	0,206
Mts	0,165
Ka	0,0202
Kh	0,0095
Kv	0,00545371
Klab	0,000843318
Ktr	0,25
Kmr	1
Jv	0,058980163
Jmr	2,65E-05
Jtr	1,65E-05
Rts	0,1
Rms	0,155
alpha_v	-0,671184704

Tableau II.1 : paramètres du modèle TRMS

II.6 Simulation

Voici ci-dessous quelques réponses du système en boucle ouverte

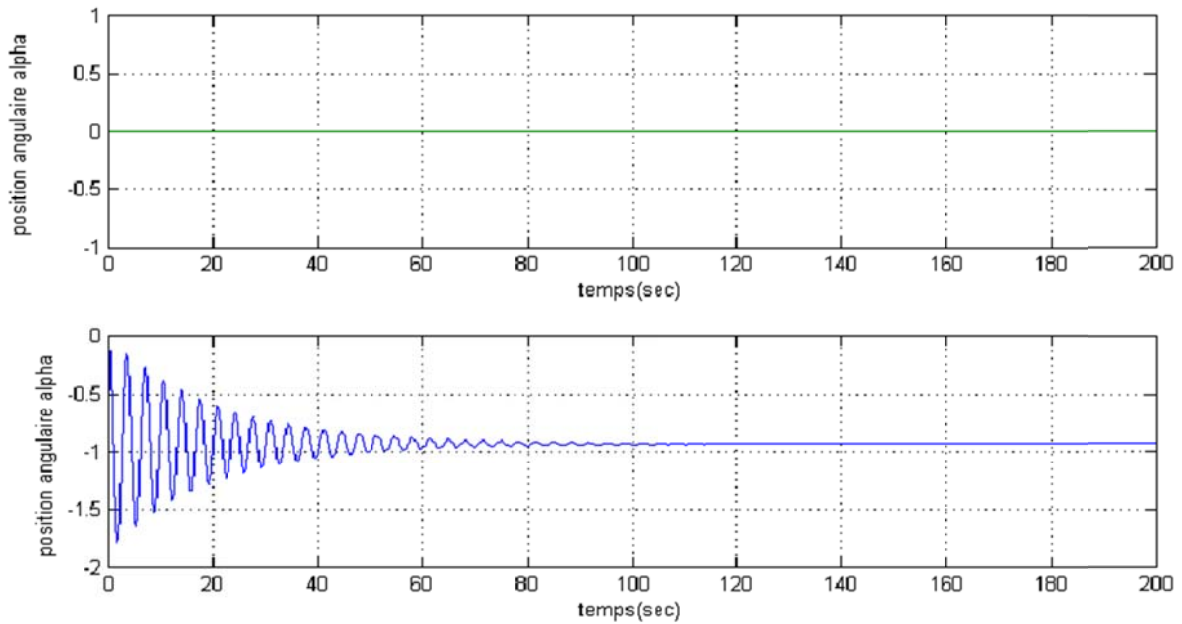


Figure II.10 : Réponse libre du système avec $\alpha_{V0} = 0$ et $\alpha_{h0} = 0$ et $u_V = u_h = 0$

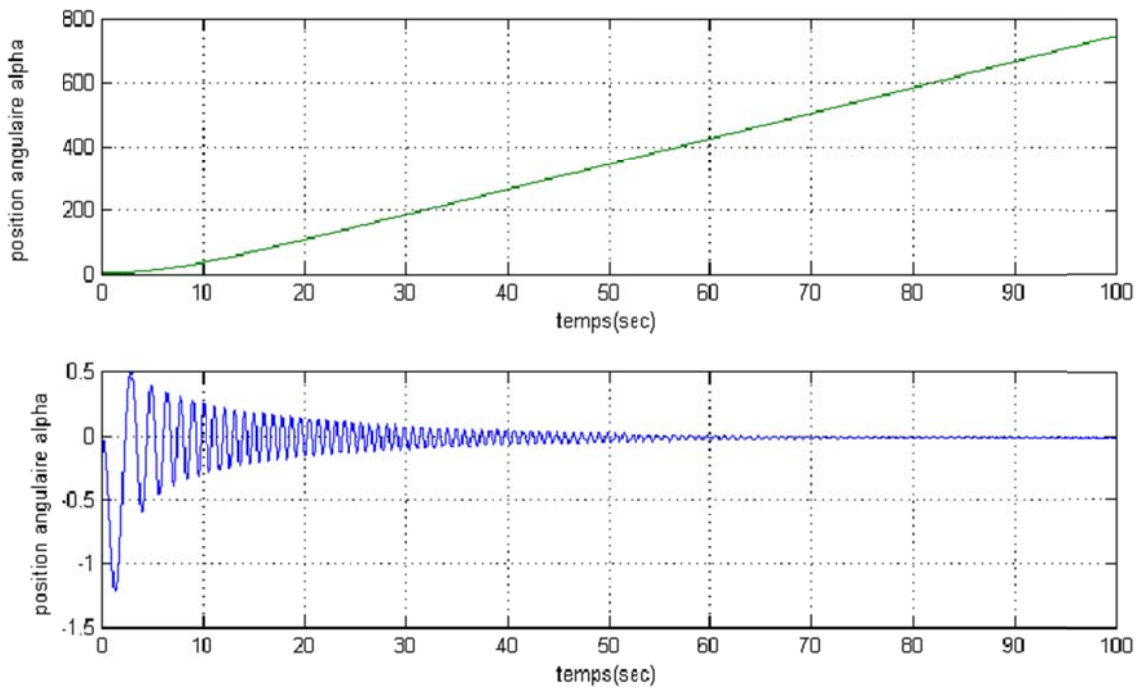


Figure II.11 : Réponse du système pour $u_V = u_h = 0.5$ avec $\alpha_{V0} = 0$ et $\alpha_{h0} = 0$

La réponse libre du sous-système d'élévation est oscillatoire amortie, dont l'origine est le moment gravitationnel, ce dernier n'agit que dans le plan vertical. L'amortissement quant à lui est dû aux forces de frictions qui forcent le système à se stabiliser à un point d'équilibre ($\alpha_{V0} = -0.93rad$). Quant au sous système d'azimut, il reste à sa position initiale tant qu'il n'est pas excité.

Lorsqu'on excite le système, le sous-système vertical tend vers un nouveau point d'équilibre qui dépendra de l'excitation appliquée. Pour une excitation $u_V \in [-2.5, 2.5]$, le sous système vertical se comporte comme un système BIBO. (Bounded Input Bounded Output). Le sous système horizontal a le comportement d'un intégrateur, il a une infinité de points d'équilibres (tout le plan horizontal), et il diverge même pour de petites excitations..

II.7 CONCLUSION

Nous avons procédé par la modélisation analytique pour avoir un modèle mathématique du TRMS, un modèle qui est non linéaire et couplé. Bien que nous avons essayé d'adapter le modèle au système réel, une erreur de modélisation due essentiellement aérodynamique négligées persiste. (Exemple : problème des nappes des capteurs).